МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«Дальневосточный федеральный университет»**
(ДВФУ)

**Департамент довузовского образования**

**«УТВЕРЖДАЮ»**
Проректор ГАУ ДПО ПК ИРО по развитию системы работы с одаренными детьми
_______________ Н.В. Ланская
«11» __01__ 2023 г.

**«УТВЕРЖДАЮ»**
Заместитель проректора – директор департамента довузовского образования
_______________ В.В. Доровская
«11» __01__ 2023 г.

Дополнительна общеобразовательная программа

**«Зимняя Тихоокеанская школа по математике»**

Владивосток, 2023

**Дополнительная общеобразовательная программа**
**«Тихоокеанской школы по математике»**
**для школьников**

**Кол-во часов:** 42 академических часа.

**Срок реализации программы/Срок обучения:** 7 календарных дней, 9-15 февраля 2023 года.

**Возраст обучающихся/Категория слушателей:** 10-17 лет.

**Состав групп:** разновозрастной.

**Форма реализации:** очная, интенсивная.

**Формы организации деятельности обучающихся**: индивидуальная, групповая, фронтальная.

**Типы занятий:** комбинированные, теоретические, практические.

**Вид контроля:** итоговый.

**Формы подведения итогов реализации программы:** по окончанию обучения проводится итоговая аттестация в форме олимпиады. Документальной формой подтверждения итогов реализации программы является документ об образовании (Сертификат).

**Цель:**

Развить навыки и умения для успешного выполнения заданий по типовым темам, которые есть в олимпиадных заданиях как на муниципальном, так и на региональном туре. Повысить навыки разговорной речи обучающихся.

**Конкретизация учебного материала:**

Темы занятий 8-9 класс:

Инварианты, классические неравенства, делимость, остатки, теория графов, оценка+пример, логические задачи, игры и стратегии, планиметрия, сравнения по модулю.

Темы занятий 10 класс:

Инварианты, функциональные уравнения, теория графов, многочлены, игры и стратегии, раскраски, основы теории чисел, планиметрия, рекуррентные соотношения.

Темы занятий 11 класс:

Последовательности, стереометрия, теория графов, многочлены, игры и стратегии, тригонометрия, основы теории чисел, планиметрия, рекуррентные соотношения.

**Примеры заданий:**

Занятие **Неравенства**

1. $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, при $a, b \ge 0$
2. $a^2 + b^2 \ge 2ab$
3. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, при $a, b > 0$
4. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}$
5. $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$
6. Если $a > 1, b < 1$, то $a + b > 1 + ab$.
7. Докажите, что $a^2 + b^2 > c^2 + (a + b - c)^2$, где $a > c,\ b < c$.
8. Докажите, что для $a > 0$ верно $a + \frac{1}{a} \ge 2$ и при $a < 0$ выполняется $$a + \frac{1}{a} \le -2.$$
9. Пусть $x + y + z = 0$. Докажите, что $xy + yz + xz \le 0$.
10. Докажите, что для $a, b, c > 0$ выполняется неравенство $$(a + b)(a + c)(b + c) \ge 8abc.$$
11. Докажите, что для $a, b, c > 0$ выполняется неравенство $$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$
12. Докажите, что для $a, b, c > 0$ выполняется неравенство

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

13. Докажите, что для $a, b, c > 0$ выполняется неравенство
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$$

14. Докажите, что $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$.

15. Докажите, что для $a, b > 0$ выполняется неравенство $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

16. Докажите, что для $a, b, c > 0$ выполняется неравенство
$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c).$$

17. Докажите, что если $a \geq b,\ x \geq y$, то $ax+by \geq ay+bx$.

18. Докажите, что $\frac{x^6}{y^2}+\frac{y^6}{x^2} \geq x^4+y^4$.

19. Пусть $x, y \geq 0$. Докажите, что $\sqrt{\frac{x^2}{y}}+\sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

20. Числа $a, b, c > 0$ таковы, что $abc=1$. Докажите, что $a+b+c \geq 3$.

21. Найти $x, y$ такие, что $(x-y)^2+\left(y-2\sqrt{x}+2\right)^2=\frac{1}{2}$.

22. (Всеросс., 2015, РЭ, 9.2) Числа $a, b, c, d$ таковы, что $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Докажите, что $(2+a)(2+b) \geq cd$.

23. (Всеросс., 2012, РЭ, 9.6) Числа $a$ и $b$ таковы, что $a^3-b^3=2$, $a^5-b^5 \geq 4$. Докажите, что $a^2+b^2 \geq 2$.

24. (Всеросс., 2011, РЭ, 9)Даны положительные числа $x, y, z$. Докажите неравенство
$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1} \leq \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}.$$

22.3.3. (Эйлер) В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL. На отрезке BK отмечена точка N так, что LN ∥ AC. Оказалось, что NK = LN. Найдите величину угла ABC.

21.3.5 (Эйлер) CL — биссектриса треугольника ABC. CLBK — параллелограмм. Прямая AK пересекает отрезок CL в точке P. Оказалось, что точка P равноудалена от диагоналей параллелограмма CLBK. Докажите, что AK ≥ CL.

21.3.7 (Эйлер) Точка M — середина стороны AC равностороннего треугольника ABC. Точки P и R на отрезках AM и BC соответственно выбраны так, что AP = BR. Найдите сумму углов ARM, PBM и BMR.

**19.3.4.** Высоты остроугольного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. На отрезках $BH$ и $CH$ отмечены точки $B_1$ и $C_1$ соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности $\omega$, описанной около треугольника $B_1HC_1$, лежит на прямой $BC$. Докажите, что окружность $\Gamma$, описанная около треугольника $ABC$, касается окружности $\omega$.

**19.3.8.** Дан треугольник $ABC$. На внешней биссектрисе угла $ABC$ отмечена точка $D$, лежащая внутри угла $BAC$, такая, что $\angle BCD = 60°$. Известно, что $CD = 2AB$. Точка $M$ — середина отрезка $BD$. Докажите, что треугольник $AMC$ — равнобедренный.

**18.3.3.** Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка $E$ так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка $M$ — середина отрезка $BC$. Найдите угол $DME$.

**18.3.9.** В окружности $\omega$ с центром в точке $O$ провели непересекающиеся хорды $AB$ и $CD$ так, что $\angle AOB = \angle COD = 120°$. Касательная к $\omega$ в точке $A$ пересекает луч $CD$ в точке $X$, а касательная к $\omega$ в точке $B$ пересекает луч $DC$ в точке $Y$. Прямая $\ell$ проходит через центры окружностей, описанных около треугольников $DOX$ и $COY$. Докажите, что $\ell$ касается $\omega$.

## Занятие Вписанные углы

1. Хорды AB и CD пересекаются. Угол ABD равен 33°. Найдите величину угла ACD.

2. Хорды AB и CD пересекаются. Угол ADC равен 50°, угол ABD равен 80°. Найдите величину угла CAD.

3. Сторона треугольника равна 10 см, а противолежащий ей угол 150°. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

4. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равен угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности?

5. Трапеция является вписанной тогда и только тогда, когда она равнобокая.

6. Диагонали равнобокой трапеции ABCD с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Докажите, что центр O ее описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB.

7. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекая сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Угол AEC в 5 раз больше угла BAF , а угол ABC равен 72° . Найдите радиус окружности, если AC = 6.

8. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведённые из точек B и C, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках $B_1$ и $C_1$ .

Оказалось, что отрезок $B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC .

9. (Всеросс., 2011, РЭ, 9.2) Дан равнобедренный треугольник $ABC(AB = AC)$. На меньшей дуге $AB$ описанной около него окружности взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC. Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

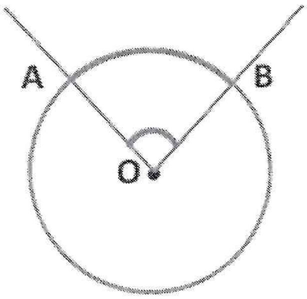
10. (Всеросс., 2010, РЭ, 9.6) Пусть точки $A, B, C$ лежат на окружности, а прямая $b$ касается этой окружности в точке $B$. Из точки $P$, лежащей на прямой $b$, опущены перпендикуляры $PA_1$и $PC_1$ на прямые $AB$ и $BC$ соответственно (точки $A_1$ и $C_1$ лежат на отрезках $AB$ и $BC$). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.

11. (Всеросс., 2009, РЭ, 9.3) В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1, BB_1, CC_1$. Прямая, перпендикулярная стороне $AC$ и проходящая через точку $A_1$, пересекает прямую $B_1C_1$ в точке $D$. Докажите, что угол $ADC$ прямой.

Центральный угол — угол с вершиной в центре окружности. Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую опирается (по определению). Если провести два радиуса, то образуется два центральных угла (сумма которых 360°) и две дуги окружности (сумма длин которых 2πR). Большему центральному углу соответствует большая дуга.

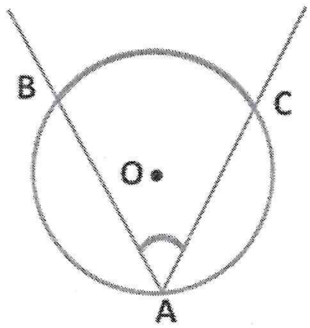
Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают её. Вписанный угол в два раза меньше центрального, опирающегося на ту же дугу. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по одну сторону от этой хорды, равны.

**Центральный угол:**




$$\angle AOB = \cup AB$$

**Вписанный угол:**




$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC$$

## Признаки вписанного четырехугольника

Для того, чтобы четырехугольник был вписанным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих равенств:

- $\angle BAD + \angle BCD = 180°$ (сумма противоположных углов равна $180°$);
- $\angle ABD = \angle ACD$ (углы, опирающиеся на одну сторону равны);
- $AF \cdot FC = BF \cdot FD$ ($F$ — точка пересечения диагоналей);
- $EA \cdot EB = EC \cdot ED$ ($E$ — точка пересечения прямых $AB$ и $CD$).

**Образовательные результаты:**

Обучающиеся ознакомятся:

– с критериями и методикой оценивания выполнения олимпиадных заданий;

– со структурой написания письменный заданий

Обучающиеся научаться:

– решать типовые задачи;

– правильно рассуждать;

– работать с текстом, вычленять из текста основные компоненты его содержания, отвечать на вопросы по содержанию текста;

– планировать время на решение задачи.

### Учебно-тематический план для 8-9 класса:

| № | Наименование аспектов | Всего ак. час | в том числе: | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Лекции | Практические занятия | Самостоятельная работа |
| 1 | Инварианты | 2 | | 2 | |
| 2 | Классические неравенства | 3 | 1 | 2 | |
| 3 | Делимость, остатки | 4 | 2 | 2 | |
| 4 | Теория графов | 4 | 1 | 3 | |
| 5 | Оценка+пример | 2 | | 2 | |
| 6 | Логические задачи | 2 | | 2 | |
| 7 | Игры и стратегии | 4 | 1 | 3 | |
| 8 | Планиметрия | 7 | 1 | 6 | |
| 9 | Сравнения по модулю | 4 | 2 | 2 | |
| 10 | Итоговая аттестация | 10 | | | |
| | **Итого:** | **42** | **8** | **24** | **0** |

### Учебно-тематический план для 10 класса:

| № | Наименование аспектов | Всего ак. час | в том числе: | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Лекции | Практические занятия | Самостоятельная работа |
| 1 | Инварианты | 2 | | 2 | |
| 2 | Функциональные уравнения | 3 | 1 | 2 | |
| 3 | Теория графов | 4 | 2 | 2 | |
| 4 | Многочлены | 4 | 1 | 3 | |
| 5 | Игры и стратегии | 2 | | 2 | |
| 6 | Раскраски | 2 | | 2 | |
| 7 | Основы теории чисел | 4 | 1 | 3 | |
| 8 | Планиметрия | 7 | 1 | 6 | |
| 9 | Рекуррентные соотношения | 4 | 2 | 2 | |
| 10 | Итоговая аттестация | 10 | | | |
| | **Итого:** | **42** | **8** | **24** | **0** |

### Учебно-тематический план для 11 класса:

| № | Наименование аспектов | Всего ак. час | в том числе: | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Лекции | Практические занятия | Самостоятельная работа |
| 1 | Последовательности | 2 | | 2 | |
| 2 | Стереометрия | 3 | 1 | 2 | |
| 3 | Теория графов | 4 | 2 | 2 | |
| 4 | Многочлены | 4 | 1 | 3 | |
| 5 | Игры и стратегии | 2 | | 2 | |
| 8 | Тригонометрия | 2 | | 2 | |
| 9 | Основы теории чисел | 4 | 1 | 3 | |
| 10 | Планиметрия | 7 | 1 | 6 | |
| 11 | Рекуррентные соотношения | 4 | 2 | 2 | |
| 12 | Итоговая аттестация | 10 | | | |
| | **Итого:** | **42** | **8** | **24** | |

**Кадровое обеспечение:**

| № | ФИО | Ученая степень, звание | Основное место работы, должность |
|---|---|---|---|
| 1 | Ефремов Е.Л. | К.ф.-м.н., доцент | Департамент математики ИМКТ ДВФУ, доцент |
| 2 | Заболотский В.С. | | Департамент математики ИМКТ ДВФУ, доцент |
| 3 | Карагодин М.Д. | | ИМКТ ДВФУ, студент |
| 4 | Первухин М.А. | К.ф.-м.н. | Департамент математики ИМКТ ДВФУ, доцент |
| 5 | Трикашная Н.В. | К.ф.-м.н. | Департамент математики ИМКТ ДВФУ, доцент |
| 6 | Чеботарев А.Ю. | Д.ф.-м.н., профессор | Департамента математического и компьютерного моделирования ИМКТ ДВФУ, профессор |

**Дополнительная литература:**


1. А. В. Акопян. Геометрия в картинках (1-е изд.). (с2) М., 2011
2. Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. Алгебра и теория чисел для математических школ. (с2) М.: МЦНМО, 2001, 264 с.
3. Э. Б. Винберг. Симметрия многочленов. (с2) МЦНМО, 2001.
4. Р. К. Гордин. Задачи по геометрии (с2)
5. А. Канель, А. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи (с2) М.: МЦНМО, 2008, 96 с.
6. В. В. Прасолов, Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Я. Канель-Белов, Ю. Г. Кудряшов, И. В. Ященко Московские математические олимпиады 1935–1957 М.: МЦНМО, 2010, 344 с.
7. Р. М. Федоров, А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, И. В. Ященко. Московские математические олимпиады 1993–2005 г. М.: МЦНМО, 2006, 456 с.
8. В. В. Прасолов. Многочлены (с2) М.: МЦНМО, 2003, 336 с.
9. В. Ю. Протасов. Максимумы и минимумы в геометрии. (с2) М.: МЦНМО, 2005.
10. А. М. Райгородский. Хроматические числа. (с2) МЦНМО, 2003.
11. А. В. Спивак. Математический кружок. 7 класс. (с2) М.: Мех.-мат. МГУ, 2001, 72 с.

12. В. А. Успенский. Простейшие примеры математических доказательств. (c2) 2-е изд., М.: МЦНМО, 2012, 56 с.

13. А. В. Шаповалов. Принцип узких мест (c2) 2-е изд., М: МЦНМО, 2008, 32 с.

14. А. Шень. Игры и стратегии с точки зрения математики (c1) 6-е изд., М.: МЦНМО, 2022, 56 с.

15. А. Шень. Математическая индукция (c1) 5-е изд., М.: МЦНМО, 2016, 32 с.

**Интернет – источники:**

1. https://problems.ru/
2. https://www.mccme.ru/
3. https://sochisirius.ru/obuchenie/nauka/smena1222/6803